

---

LES

# POSTULATS DE LA GÉOMÉTRIE

DANS L'ENSEIGNEMENT,

PAR G. VERONESE (PADOUE).

(Traduction de MM. R. BRICARD et E. DUPORCQ.)

---

Les recherches sur les principes de la Géométrie ont, dans le cours de ce siècle, enrichi la Science de nouveaux résultats importants, de méthodes générales et fécondes, et ont de plus ouvert aux philosophes de nouvelles voies d'investigations sur la théorie de la connaissance des concepts fondamentaux des Mathématiques; doivent-ils rester sans influence sur l'enseignement de la Géométrie rationnelle élémentaire, lorsque le but même de cet enseignement est de contribuer à préparer l'esprit aux études supérieures, en l'habituant au raisonnement rigoureux?

Depuis que ces recherches ont mis en évidence les défauts du texte d'Euclide, qui avait servi durant plusieurs siècles à l'éducation mathématique de la jeunesse, si l'on veut faire un Ouvrage sérieux, témoignant de quelque progrès, ne doit-on pas se préoccuper de la nature, du rôle des postulats, de leurs relations intimes et des liens qui unissent les diverses théories et les méthodes variées que ces recherches ont fait éclore? Pourtant, si Euclide fut lui-même un grand géomètre, n'est-ce pas précisément parce que l'ouvrage qu'il composa répondait aux vues de son époque? Et la fortune qui accueillit en France et ailleurs les *Éléments* de Legendre, peut-être fut-elle due surtout à la nouveauté des méthodes et des idées qu'ils contiennent. Quant à ceux qui affirment aujourd'hui que, pour écrire un nouveau traité, on n'a pas à se préoccuper d'études critiques sur les principes de la Géométrie, ils devraient prouver que l'enseignement élémentaire est parvenu à son plus haut degré de perfection. D'ailleurs, même sans avoir la patience ou l'audace de composer un nouveau traité, le professeur qui voudra néanmoins en choisir un bon à

l'usage de ses élèves, comment pourra-t-il convenablement guider son choix, s'il ne s'intéresse pas lui-même à ces questions? Toutes les discussions auxquelles a donné lieu le texte d'Euclide démontrent clairement que le problème didactique dépend du problème scientifique relatif aux postulats. Nous parlons, bien entendu, du problème didactique qui se pose dans l'enseignement classique, dont l'objectif est le même dans tous les pays civilisés, et qui s'occupe partout des mêmes sujets, à part quelques variations, d'une nation à l'autre, portant sur la quantité des matières, mais non sur la qualité. Quant aux écoles spéciales, qui préparent aux hautes études techniques, les Mathématiques doivent, plus encore que dans l'enseignement classique (où les études littéraires sont plus développées), y contribuer à la formation de l'esprit et au culte du vrai. Concilier les exigences de la Science, celles de l'enseignement, et aussi celles de l'intelligence moyenne des élèves, tel est donc, selon nous, le but que doit se proposer l'auteur d'un nouveau traité de Géométrie élémentaire. Il est nécessaire, enfin, que les professeurs aient foi dans le progrès de la Science, et qu'ils se débarrassent de préjugés : car, dans toutes les parties des Mathématiques, il n'en est pas où les préjugés soient plus solidement enracinés que dans celle des principes, où il est si facile de travestir les pensées des autres, que ce soit à cause de l'obscurité où sont inconsciemment tombés quelques auteurs illustres, ou encore par suite d'une critique peu attentive et peu consciencieuse. Et il en est surtout ainsi dans l'enseignement, par suite de l'habitude que prennent certains professeurs d'enseigner aveuglément les Mathématiques à l'aide d'une méthode donnée, ce qui les met dans l'impossibilité de se renouveler et les pousse à mépriser le nouveau.

Comment donc concilier les exigences de la Science et de l'enseignement? Il sera tout d'abord avantageux de rechercher à quel point on y est parvenu jusqu'ici, cette recherche restant mieux déterminée et plus simple. Ce fut Legendre qui, le premier depuis Euclide, tenta dans ses *Éléments* une réforme de l'enseignement de la Géométrie, et ces *Éléments*, qui datent de l'époque de la Révolution française, furent longtemps comme le nouveau code de la Géométrie élémentaire, même en Italie; aujourd'hui encore, leur influence est manifeste sur les traités français modernes dont j'ai connaissance, et dont quelques-uns encore sont adoptés en Italie dans les écoles techniques. Mais, malgré tout, on ne peut dire que Legendre ait évité les défauts du texte d'Euclide, et même, comme l'observe Houel, qui, en France, étudia passionnément les principes de la Géométrie, et dont l'opinion sur ce sujet fait autorité,

Legendre altéra la beauté de la méthode grecque par l'introduction de procédés arithmétiques. C'est pour éviter cet inconvénient qu'en Italie les illustres mathématiciens Betti et Brioschi firent une traduction des *Éléments* d'Euclide et que le texte euclidien fut officiellement prescrit dans l'enseignement classique; on n'avait pas d'ailleurs principalement en vue l'adoption de ce texte, mais on désirait surtout l'introduction de la méthode qui respecte la rigueur scientifique, et qui, jusqu'à la théorie de la mesure, exclut du raisonnement géométrique tout soutien arithmétique ou algébrique; et ce fut sage, même si le texte d'Euclide ne répondait plus aux exigences de la Science et de l'enseignement modernes. Il ne me semble d'ailleurs pas que les autres traités, où sont suivies les méthodes d'Euclide, ou celles de Legendre, ou d'autres encore, soient parvenus à cette conciliation entre la Science et l'enseignement que désireraient tant de professeurs, et qu'il est possible d'atteindre.

Dans la préface de mes *Fondements* <sup>(1)</sup>, je distingue les sciences mathématiques en sciences formelles et en sciences expérimentales. Les premières comprennent l'Arithmétique et les Mathématiques pures en général, car, par exemple, dans sa formation primitive, l'idée de nombre provient de la faculté de compter des objets, qui peuvent être purement abstraits; ces sciences envisagent des êtres qu'il n'est pas nécessaire, pour pouvoir les déterminer mathématiquement, de représenter en dehors de la pensée par des objets qui en seraient les images (bien entendu, en dehors de toute opinion philosophique sur l'origine des idées mathématiques abstraites). La logique pure est, elle aussi, une science formelle. Au contraire, les sciences qui s'occupent d'objets qui existent en réalité, en dehors de la pensée, ou d'objets abstraits analogues pouvant se représenter en dehors de la pensée, sont des sciences expérimentales. Tandis que, dans les sciences formelles, la vérité résulte de l'accord avec diverses conceptions primitives, toutes reconnues comme vraies, dans les sciences expérimentales, elle provient de l'accord entre l'observation et la pensée, de sorte que ces sciences sont basées sur quelques vérités primitives dont l'intuition accompagne la perception de certains faits, mais qui ne peuvent se déduire les unes des autres. Ces vérités primitives sont les *axiomes* proprement dits. Par exemple, la proposition suivante : « la droite, dans le champ de notre observation extérieure, est déterminée par deux quelconques de ses points » est un axiome, lorsqu'elle n'est pas réductible aux prémisses. Il y a encore en Géométrie d'autres

---

(1) Traduction en allemand de A. SCHEPP. Leipzig, Teubner, 1894.

axiomes, qui résultent aussi de l'observation directe des objets extérieurs, dans le champ limité de notre observation, mais que nous étendons ensuite aux objets, hors de notre portée effective, qui se trouvent en dehors de ce champ : c'est ce qui arrive pour l'axiome cité tout à l'heure et relatif à la droite, lorsque nous l'étendons à une droite illimitée, c'est-à-dire à tout l'espace, que nous ne pourrions observer. Il y a enfin d'autres axiomes qui ne se rapportent plus qu'aux objets extérieurs au champ géométrique correspondant à celui de notre observation : par exemple, ceux qui concernent le point déterminé par une répartition de Dedekind, le point qui sert à la construction de l'espace à quatre dimensions, etc. : ces axiomes n'ont plus alors qu'une existence abstraite. Aussi est-il nécessaire, pour les axiomes des deux dernières espèces, de prouver leur compatibilité avec les axiomes proprement dits qui dérivent de l'observation directe. Les axiomes des deux dernières catégories sont plus proprement des postulats ou des hypothèses. Il est clair qu'au nombre des axiomes d'une science expérimentale il est inutile de placer les principes qui appartiennent à la logique pure et sont la base de tout raisonnement, comme, par exemple, le principe de contradiction. Donc, en résumé : *les axiomes et les postulats ou hypothèses géométriques sont des propositions indémontrables ; les uns dérivent d'une manière évidente de l'observation directe, les autres ne sont en contradiction ni avec les précédentes, ni entre elles.*

Les sciences formelles sont des sciences exactes. Nous considérons aussi la Géométrie et la Mécanique rationnelle comme des sciences exactes, parce qu'aux objets concrets qui ont servi à déterminer les axiomes proprement dits, notre esprit substitue des formes abstraites, pour lesquels la vérité se démontre au moyen des axiomes, indépendamment de leur signification effective. Ce n'est donc pas sans raison que la Géométrie et la Mécanique rationnelle sont considérées comme des mathématiques pures. Il va de soi qu'une science est d'autant plus simple et exacte que les axiomes sont plus simples et moins nombreux. On pénètre de suite dans le domaine de l'observation, lorsqu'on cherche à établir empiriquement la vérité, en opérant sur les objets primitifs, quand la réalité extérieure le permet, d'une manière analogue à celle qu'on emploie pour opérer sur les formes abstraites auxquelles ces objets ont donné naissance. Par exemple, dans le plan euclidien, deux droites quelconques non parallèles se rencontrent en un point ; mais, dans le champ de l'observation extérieure, il existe aussi sur un plan des droites non parallèles, mais qui, même prolongées en restant dans ce champ, ne

se rencontrent pas. Mais si certaines opérations sont possibles dans ce champ de l'observation, avec certains objets, l'impossibilité pratique d'en faire d'autres avec d'autres objets, dans le même champ ou en dehors de lui, n'infirme en rien la vérité acquise dans un domaine abstrait plus étendu. Au contraire, je distingue nettement au point de vue scientifique la Géométrie de ses applications pratiques, et je trouve des axiomes qui ne sont pas nécessaires au développement logique de la Géométrie, mais le sont à ses applications pratiques : par exemple, qu'un corps peut se mouvoir sans déformation, ou que l'espace physique est à trois dimensions.

Dans un traité de Géométrie élémentaire, les postulats devront, autant que possible, satisfaire aux conditions précédemment énoncées, mais il est certain qu'ils ne pourront satisfaire à toutes au même degré. Par exemple, dans les recherches scientifiques, il conviendra de disséquer avec soin les postulats, pour montrer l'indépendance de leurs diverses parties; mais une telle méthode serait antididactique : car, dans l'enseignement, il est nécessaire d'attirer l'attention des élèves sur les propositions principales, afin qu'ils en conservent une impression forte et durable. Et c'est non seulement vrai pour les postulats, mais aussi pour les définitions et pour les théorèmes. Utile aux recherches scientifiques, la critique doit être exclue de l'enseignement, car elle amènerait de la confusion dans l'esprit des élèves, bien qu'il soit nécessaire qu'elle ait occupé l'auteur même d'un traité ou le maître qui en choisit un pour son enseignement. Aussi ne peut-on donner les postulats en ne les appliquant d'abord qu'à un champ correspondant à celui de notre observation, et en démontrant ensuite qu'on peut les admettre pour tout l'espace : ce serait, dès l'origine, introduire trop de distinctions à faire. Par exemple, dans le plan, il faudrait distinguer de suite les droites qui se coupent, celles qui ne se coupent pas, mais ne sont pas parallèles, et enfin les droites parallèles. Mais, d'un autre côté, il faut que le professeur puisse dire qu'en admettant les postulats pour une étendue limitée de l'espace, on peut les admettre ou les démontrer pour tout l'espace. Et, dès lors, on voit de suite que le postulat d'Euclide relatif aux parallèles, et basé sur la définition commune des parallèles, comme étant deux droites du plan qui, prolongées indéfiniment, ne se rencontrent pas, n'est pas une proposition déduite de l'observation directe, puisque personne n'a jamais vu deux telles droites.

J'ai dit que, scientifiquement, les postulats doivent être compatibles et indépendants. La condition de compatibilité, c'est-à-dire de non

contradiction, est encore nécessaire dans l'enseignement, bien qu'on ne puisse la démontrer par un raisonnement didactique, pour les postulats qui ne dérivent pas de l'observation directe. L'indépendance des postulats simples n'est pas seulement une question d'*élégance*, mais aussi de *précision*. En supposant qu'un axiome (ou un groupe d'axiomes), A, suffise à définir une figure, si l'on se donnait en outre comme propriété de cette figure un autre axiome B dépendant de A, on croirait que cela signifie qu'il y a diverses sortes de figures satisfaisant aux conditions A, et que c'est pour distinguer une de ces figures qu'on a eu recours à l'autre condition B, ce qui serait absurde : ce défaut serait par exemple manifeste dans une définition telle que celle-ci : un triangle isocèle est un triangle tel que deux côtés soient égaux ainsi que les angles opposés à ces côtés. On le retrouve encore, ainsi que l'a observé Gauss lui-même, dans l'axiome qui sert communément à définir le plan, et qui est le suivant : une droite qui a deux points communs avec un plan y est située tout entière ; en effet le plan peut être construit, dans le système euclidien, en joignant un point aux divers points d'une droite, et en menant par le point la parallèle à cette droite, ou bien au moyen d'un triangle et d'un point intérieur ; les propriétés du plan devront toutes dériver des éléments de sa construction, et, par suite, des postulats qui déterminent ces éléments. Malheureusement, l'indépendance des axiomes est difficile à obtenir, même scientifiquement, car ils doivent être décomposés en leurs parties simples. Par exemple, le postulat, d'après lequel la droite est déterminée dans le système euclidien par deux quelconques de ses points, contient autant de postulats qu'il existe de couples de points sur la droite. J'ai, en effet, démontré dans mes *Fondements* que, au moyen de postulats convenables, si l'on admet le postulat précédent pour un couple et pour les couples égaux, ce postulat se démontre pour tous les autres couples dans les systèmes d'Euclide et de Lobatschewsky, tandis que dans le système de Riemann (sphérique), il se présente encore des couples qui ne déterminent pas la droite. On voit donc que l'indépendance des postulats, au véritable sens du mot, est encore un but idéal, dont on ne cessera de se rapprocher, mais que personne encore n'a pu atteindre. H. Grassmann disait, non sans raison, que la Science se développe dans deux sens, l'élévation et la profondeur, également illimitées et obscures. Mais, alors même qu'il arrive qu'au point de vue scientifique les postulats d'un système donné ne sont pas toujours tous indépendants, on est encore souvent obligé dans l'enseignement d'y adjoindre d'autres postulats, dépendant des premiers, pour

éviter de trop morceler les propositions fondamentales et ne pas augmenter considérablement les matières, et pour ne pas être astreint à des démonstrations qui, bien qu'élémentaires, n'en sont pas moins trop compliquées pour des études scolaires. Mais si ces raisons forcent à introduire ainsi, dans l'enseignement de la Géométrie rationnelle, plus de postulats qu'il ne serait nécessaire, l'auteur, comme le professeur, fera bien de signaler que si ces propositions sont données sans démonstration, c'est pour abréger l'exposé, mais qu'elles n'ont pas le caractère de postulats véritables. Aussi ne pourrons-nous jamais approuver les auteurs qui, en croyant éviter toute difficulté, définissent l'axiome comme une proposition évidente par elle-même. Alors il n'y aurait pas de raison pour s'arrêter à moitié route, bien que, malgré cette définition de l'axiome, les traités en question démontrent par exemple qu'un segment rectiligne est plus court que toute ligne brisée ayant les mêmes extrémités, et beaucoup d'autres propositions évidentes. Il n'y aurait plus alors de possible, didactiquement, qu'un système unique de postulats, constitué par toutes les propositions évidentes de la Géométrie élémentaire. Mais ce qui serait pire que tout, c'est qu'on ne pourrait plus se fier aux définitions, car, en considérant les propositions exprimées par les axiomes comme des résultats évidents par intuition, ou comme des conséquences de l'observation, il n'en résulterait pas qu'elles puissent s'appliquer à *tout* l'espace.

Il ne faut d'ailleurs pas croire qu'il ne puisse être parfois utile de faire abstraction de quelques postulats, même au point de vue didactique. En effet, on aura quelquefois avantage à faire usage de certaines analogies entre diverses figures, comme par exemple entre la droite, le faisceau de rayons, la circonférence, le faisceau de plans, etc. : la droite et la circonférence, dans le système euclidien, diffèrent en ce que l'une est une ligne ouverte et l'autre une ligne fermée, mais les autres propriétés de ces deux lignes, considérées en elles-mêmes, sont identiques. De même, le faisceau de rayons et la circonférence diffèrent seulement en ce que l'élément du faisceau est le rayon, et l'élément de la circonférence, le point. Supposons donc donnés pour la droite des postulats A, B, C, D, d'où l'on peut déduire les propriétés E, F, G, etc. ; si les propositions A, B, C, D subsistent pour la circonférence, nous pourrons énoncer aussi, sans autre démonstration, les propositions E, F, G, etc., appliquées à la circonférence, moyennant le changement de quelques termes, comme par exemple, segment et arc. Mais si nous avions admis aussi la proposition E comme un postulat relatif à la droite, il aurait fallu la démontrer pour la circon-

férence, pour le faisceau de rayons et pour le faisceau de plans, et il aurait fallu trois démonstrations au lieu d'une.

Mais ce qui importe avant tout dans l'enseignement élémentaire, c'est l'exactitude du raisonnement; aussi faut-il que tous les postulats dont on a besoin soient énoncés explicitement, et qu'on ne se serve jamais dans les démonstrations d'autres propositions non admises. Et, bien que Euclide et Legendre aient énoncé explicitement les axiomes (exemple que tous les Traités devraient suivre), il n'est pas difficile de citer des propositions pour la démonstration desquelles ils ont employé tacitement d'autres axiomes. Euclide, par exemple, dans la proposition I du Livre I, s'appuie, pour construire le triangle équilatéral, connaissant son côté, sur des théorèmes relatifs à l'intersection de deux cercles, qui sont traités bien après. De même, sans avoir admis d'abord le postulat que la droite est une ligne ouverte, ou le postulat des parallèles, on démontre parfois la propriété de l'angle externe d'un triangle d'être supérieur à chacun des angles internes opposés; or cette démonstration ne devient exacte qu'en y introduisant tacitement un autre axiome, qui n'est nullement évident.

La nécessité d'exprimer ainsi tous les postulats explicitement est d'ailleurs comprise dans une condition plus générale. Pour être véritablement exact, et non approximatif comme il le serait dans un enseignement intuitif de la Géométrie, le raisonnement doit être logiquement exact, comme en Arithmétique: que faut-il entendre par là? Cela signifie que l'on devra faire abstraction de la signification géométrique des êtres sur lesquels on raisonne, c'est-à-dire abstraction de l'intuition de l'espace, pour se borner à un raisonnement logiquement exact. Et ainsi, par suite du but même de l'enseignement de la Géométrie, on devra obéir à ce principe que, *étant donné le système des vérités géométriques, si l'on y fait abstraction de l'intuition de l'espace, il devra subsister un système de vérités bien déterminées logiquement, comme en Arithmétique*. Il est facile de faire cette abstraction en remplaçant les éléments par d'autres, par exemple, les droites par des systèmes linéaires, déterminés par deux éléments, en choisissant le système linéaire de sorte qu'il n'ait plus le sens intuitif qu'on attache à une ligne, mais en prenant par exemple une succession d'objets tels que des nombres.

Quand on discute l'exactitude d'une proposition ou d'un raisonnement, on fait précisément plus ou moins usage de ce principe. Voyez néanmoins comment les Traités de Géométrie élémentaire observent peu cette condition essentielle. Euclide même, qui certainement a cherché à être aussi rigoureux qu'il était possible à son époque, introduit dès le

début dans les raisonnements des expressions telles que *longueur*, *largeur*, *profondeur*, *ligne*, *surface*, *corps*, etc., comme si l'on savait déjà ce qu'elles signifient géométriquement, bien que certaines d'entre elles, telles que l'expression *surface*, soient adoptées parfois avec des sens divers. Ainsi, on définit grossièrement la *figure* comme un ensemble de surfaces, de lignes et de points. Avec de telles définitions, dès qu'on fait abstraction de l'intuition, il ne reste plus rien de déterminé. Ainsi, on dit tout à coup que l'espace est continu et homogène, sans qu'on sache ce que c'est que la continuité et l'homogénéité; on dit que la droite est une ligne divisée par un de ses points en deux parties, mais on ignore ce que c'est qu'une *ligne* et ce que c'est qu'une *partie*. D'ailleurs, si la notion de la surface dérive par intuition de celle du corps, si la ligne résulte de la surface, la droite illimitée n'est pas une ligne, puisque nous n'avons jamais observé de corps illimité; et, en outre, ce qui divise en deux parties une surface n'est pas toujours une ligne; c'est, par exemple, le cas du sommet pour un cône. On dit encore que le plan est une surface telle que toute droite qui a sur elle deux points y est située tout entière. On peut répéter à ce sujet l'observation faite précédemment à propos de la droite : c'est qu'un plan illimité n'est la limite d'aucun corps. D'ailleurs, en faisant abstraction de l'intuition, et en supposant que la droite soit bien déterminée, sans qu'on ait bien défini le mot *surface*, la propriété, que toute droite ayant deux points communs avec un plan y est située tout entière, ne suffit pas à définir le plan, car cette propriété convient aussi à l'espace ordinaire et, en général, à tout espace linéaire. Les propositions énoncées pour le plan ainsi défini ne sont pas exactes sans que l'élève ajoute de lui-même à cette définition quelque chose qui n'y figure pas. Mais, dans ces conditions, on ne lui apprend pas à raisonner exactement.... Aussi n'y a-t-il pas à s'étonner que quelques élèves, qui deviennent ensuite des philosophes, combattent les nouveaux concepts mathématiques dans le domaine des principes, comme c'est arrivé par exemple pour la Géométrie non euclidienne ou pour celle à plus de trois dimensions. Comme excuse, on dit qu'on ne peut définir aucune notion telle, par exemple, que celle d'espace. Mais il faut distinguer. On ne peut définir le continu intuitif, mais on peut définir le continu géométrique comme un groupe de points qui satisfont à certaines propriétés, géométriquement suffisantes. Ainsi, on ne peut définir l'espace intuitif, qui est en nous une représentation de l'espace physique, abstraction faite de certaines de ses propriétés, mais nous pouvons définir l'espace géométrique en déduisant de sa construction toutes ses propriétés géométriques, comme on peut le faire pour le

plan. On peut faire une observation analogue pour le postulat du mouvement sans déformation qui sert communément à établir l'égalité des figures, et qui mérite une mention spéciale. On dit, ou l'on suppose tacitement, comme le fait Euclide, qu'une figure peut se mouvoir sans *déformation*, ou, en d'autres termes, que les relations mutuelles entre ses éléments ne sont pas modifiées. Dans mes *Fondements* j'ai démontré que la Géométrie théorique peut se développer indépendamment de tout concept physique et mécanique, et, si Newton et Helmholtz ont considéré la Géométrie comme une partie de la Mécanique, c'est parce qu'ils ne distinguaient pas la Géométrie rationnelle de ses applications pratiques. Or, le postulat en question est précisément un de ceux qu'il est nécessaire d'admettre comme un *moyen* de construire pratiquement les figures, mais qui n'est pas nécessaire pour la construction géométrique abstraite de ces figures. Si l'on se conforme au principe énoncé plus haut et auquel doit satisfaire le système des vérités géométriques, une fois qu'on fait abstraction de l'intuition du mouvement, que reste-t-il de ce postulat placé à la base de la Géométrie? Il signifie qu'il existe dans l'espace des systèmes continus de figures égales à une figure donnée (qui se déplace), sans qu'on ait défini ni les systèmes continus de figures, ni les figures égales. Quand on emploie ensuite ce postulat pour définir l'égalité des figures, on voit qu'une telle définition renferme logiquement une pétition de principe. D'ailleurs ce postulat comprend des conditions compliquées, telle que celle des systèmes continus, qui ne sont nullement nécessaires pour définir l'égalité des figures. Euclide et Legendre, bien qu'ils aient tacitement fait usage de ce postulat pour démontrer l'égalité de deux figures, n'ont cependant pas défini les figures égales comme des figures superposables, ainsi qu'on fait ordinairement actuellement, en excluant ainsi les figures symétriques. Ce fut Legendre qui distingua le premier l'égalité par symétrie et l'égalité par congruence, ce qui est juste, puisque les relations mutuelles des éléments qui constituent deux figures symétriques restent aussi les mêmes. D'ailleurs le criterium de la superposition n'est pas le seul à donner celui de l'égalité, parce que, dans l'égalité par superposition, c'est-à-dire la congruence, il entre un autre concept, à savoir l'égalité de sens des figures dans l'espace qui les contient, concept tout à fait étranger à la constitution des figures prises en elles-mêmes. C'est pourquoi deux figures symétriques, c'est-à-dire égales et de sens opposé, ne sont pas superposables dans le plan, mais le sont dans l'espace ordinaire, comme deux trièdres opposés par le sommet sont superposables dans l'espace à quatre dimensions, qui a,

géométriquement, le même droit à l'existence que l'espace ordinaire. Il faut donc établir l'égalité des figures indépendamment du mouvement sans déformation, introduire à son temps le concept de sens des figures dans le plan et dans l'espace, puis définir l'égalité par congruence (figures de même sens) et par symétrie (figures de sens opposés), et alors le principe de mobilité sans déformation d'une figure dont certains points peuvent rester fixés, trouvera son explication géométrique, et l'on pourra en déduire les propriétés fondamentales; par exemple, de cette propriété que deux segments congruents d'une droite ne peuvent avoir un seul point commun, on déduira qu'un segment ne peut se mouvoir sur la droite en ayant un de ses points fixe. Une fois arrivé à ce point, dans l'exposé de la Géométrie, on pourra se servir théoriquement du principe de déplacement pour démontrer l'égalité, ou mieux, la congruence de deux figures, puisque ce principe correspondra alors à des concepts et à des propriétés géométriques bien établies.

Mais, en soutenant que le système des vérités géométriques doit être bien déterminé, je n'ai jamais eu l'intention d'exclure l'intuition spatiale, ni d'en diminuer le secours, surtout dans l'enseignement. Ce n'est pas à moi, qui ai fait largement usage de cette intuition, même où toute voie peut lui sembler barrée, comme dans la Géométrie à plusieurs dimensions, qu'on pourrait adresser une pareille objection. Il est certain que l'intuition est nécessaire à la Géométrie, que les axiomes doivent être simples et intuitifs, et que, dans les recherches purement scientifiques, on doit préférer les méthodes basées sur l'intuition spatiale. L'enseignement de la Géométrie rationnelle doit être précédé, à l'école secondaire inférieure, par un enseignement rudimentaire intuitif, afin que l'écopier se familiarise avec les figures les plus communes, dont il devra plus tard étudier les propriétés à l'aide du raisonnement. Et, même dans l'enseignement rationnel de la Géométrie, toutes les propositions et tous les raisonnements doivent être précédés et accompagnés par l'intuition de l'espace au moyen de l'observation de figures tracées sur le Tableau, ou de modèles, destinés à développer l'imagination géométrique, afin que le raisonnement apparaisse à l'écopier plutôt comme une conséquence de la vision des figures que comme le résultat d'une logique aride et abstraite. Aussi doit-on, dans le texte et plus encore dans la leçon destinée à l'enseignement scolaire, avoir recours à des observations et à des exemples pratiques, où l'on emploiera tous les concepts intuitifs acquis par l'élève, de sorte que les idées de mouvement, d'espace, de corps, de surface, de ligne servent à expliquer et à consolider les postulats, ou à éclaircir les définitions,

mais sans pourtant (et c'est là l'essentiel) que ni les postulats ni les définitions ne soient basés sur des concepts indéterminés logiquement, et sans que, dans le raisonnement proprement dit, on fasse usage de concepts non contenus dans les postulats ou dans les propositions dont on part. Par exemple, on peut éveiller l'idée du point comme celle de limite de la ligne, la ligne étant la limite de la surface, et celle-ci la limite du corps, mais dans le postulat : *il existe des points distincts*, il n'est plus question de ces concepts de corps, de surface et de ligne : en faisant abstraction de l'intuition, on a la proposition : il existe des éléments distincts. De même, pour le postulat d'après lequel il existe sur la droite des segments égaux et des segments inégaux, on peut faire usage, dans une observation pratique, du transport des objets, mais, dans le postulat lui-même, l'égalité des segments doit être établie indépendamment de ce moyen pratique. De même encore, on peut, pour la commodité du langage, employer certains termes empruntés à l'idée de mouvement, mais sous la condition d'en spécifier le sens géométrique.

Recherchons maintenant quels sont les modes d'exposition les plus convenables à l'enseignement de la Géométrie élémentaire. Même en restant au point de vue scientifique, la meilleure méthode est encore la méthode géométrique, parce qu'elle dérive du processus constitutif de l'intuition de l'espace. Puisque cette intuition est une condition primordiale et essentielle de la Géométrie, à laquelle elle fournit les premiers objets géométriques et leurs propriétés indémontrables, la meilleure méthode est celle qui, partant de ces premières propriétés, étudie directement les divers éléments des figures de sorte qu'on puisse suivre pas à pas le raisonnement en recourant à l'intuition spatiale. La simplicité et l'élégance de la Géométrie dérivent de la facilité de ses constructions. Et c'est là la méthode d'Euclide. Une méthode qui supposerait connue indirectement une partie des propriétés géométriques, ou qui s'appuierait sur une notation dont l'établissement admettrait implicitement autant de postulats, serait une méthode artificielle et indirecte, qui pourra servir à vérifier l'exactitude d'un système de postulats, à trouver de nouvelles relations entre les vérités fondamentales de la Géométrie, ou à ouvrir de nouveaux horizons à la Science, mais elle ne pourrait être utilisée à résoudre d'une manière plus satisfaisante les questions de principes, surtout si l'on a en vue le problème didactique. Lie, dans les applications qu'il a faites de ses études célèbres sur les groupes de transformations à des recherches sur les principes de la Géométrie, conclut que « Die Geometrie soll in ihrem verschiedenen Stufen soweit möglich rein geometrisch

begründet werden, dass ist eine Forderung die gewiss jeder unterschreiben wird. » On peut en conclure que l'habileté de Legendre, qui mêle les méthodes algébriques et géométriques, n'est pas recommandable didactiquement. Dans plusieurs Traités, qui ne sont généralement pas italiens, j'ai vu la facilité avec laquelle, dès le début, on considère les figures comme des quantités, en leur appliquant, sans autre explication, les propriétés des quantités arithmétiques; mais, quand on veut bien établir la théorie des grandeurs géométriques, il faut démontrer que cela est possible. De même lorsqu'on veut diviser le volume d'un solide en deux parties égales, il faut d'abord introduire les notions géométriques qui permettent d'aboutir à cette conclusion, en définissant complètement ce qu'on doit entendre ainsi par parties égales, attendu qu'en Géométrie on considère diverses sortes d'égalités. La méthode arithmétique ou algébrique ne peut donc être appliquée que quand la Géométrie est déjà suffisamment développée pour qu'on puisse montrer la possibilité de cette application, et c'est là l'objet de la théorie de la mesure.

En fixant les conditions auxquelles doivent satisfaire les postulats géométriques, et en recherchant la méthode d'exposition la plus convenable à l'enseignement, nous n'avons pas exclu la possibilité de divers systèmes de postulats. Je pense d'ailleurs que les matières de la Géométrie élémentaire d'Euclide sont encore les plus propres à l'enseignement secondaire, parce qu'elles sont la base de tout enseignement géométrique, correspondent le mieux aux besoins ordinaires de la vie et contribuent admirablement au développement des facultés logiques et intuitives de l'esprit, ce qui est le but principal de l'enseignement des Mathématiques dans les écoles qui préparent aux études supérieures. On ne trouverait par exemple pas ces qualités dans les matières de la Géométrie projective proprement dite. Il est certain, comme l'observe Chasles, que la Géométrie ancienne n'a pas les méthodes générales de la Géométrie moderne, que divers cas d'un même théorème ou d'un même problème sont traités à part comme autant de théorèmes ou de problèmes sans aucune relation, et que l'unité de certaines théories y est trop morcelée. Mais il n'en est pas moins vrai qu'il y a dans la Géométrie élémentaire des théories basées sur divers concepts fondamentaux, telles que la théorie de l'égalité, les relations métriques entre les éléments d'une figure, la théorie de la similitude, de la mesure, etc. La Géométrie élémentaire euclidienne est de nature essentiellement *métrique*; on s'y sert moins des propriétés de position que de celles d'égalité et d'inégalité, telles que les relations entre les segments, les angles, les propositions sur les triangles, etc.,

qui sont toutes de nature métrique. La méthode projective de Cayley-Klein, qui a été développée géométriquement et élémentairement par M. Pasch dans son beau Livre : *Ueber die neuere Geometrie*, et sur laquelle ont été publiés des travaux importants de MM. Peano, Schur, Enriques, Pieri, et autres, est certainement la meilleure méthode de la Géométrie projective.

Cette méthode, fondée sur des propriétés *optiques*, suivant le mot de M. Klein, permet, grâce à des conventions appropriées, d'établir les principes de la Géométrie métrique, et par suite de la Géométrie élémentaire commune. Mais, selon moi, il importe moins d'augmenter la quantité des matières que de les disposer en meilleur ordre, en évitant autant que possible le manque de rigueur, et en recourant aux méthodes modernes pour donner plus d'unité aux diverses parties de l'enseignement.

Reste par conséquent la méthode euclidienne, qui s'appuie sur les propriétés *mécaniques*, ou, plus exactement, sur les propriétés d'égalité et d'inégalité.

C'est ici que se pose la question suivante : convient-il d'énoncer au début les postulats qui concernent l'espace, ou bien ceux qui concernent la droite, pour passer ensuite au plan et enfin à l'espace? Les postulats de l'espace sont naturellement plus complexes que ceux de la droite; mais les partisans de la première méthode, qui veulent fondre la Géométrie de l'espace et la Géométrie plane, donnent pour raison que cette dernière trouve de précieux avantages à une semblable union. Je ne suis pas de cet avis : la Géométrie élémentaire présente, avant tout, un caractère *métrique*, comme je l'ai rappelé plus haut, et les propriétés d'un espace qui dérivent simplement des propriétés d'un espace supérieur sont en général des *propriétés projectives*. La méthode en question peut trouver quelques applications heureuses en Géométrie élémentaire, mais cet avantage ne compense pas l'inconvénient didactique d'exposer simultanément les principes de la Géométrie plane et ceux de la Géométrie de l'espace.

Il convient en effet, dans l'enseignement, d'aller du particulier au général, du simple au composé. Euclide, Legendre et la majeure partie des auteurs modernes exposent entièrement la Planimétrie avant d'aborder la Stéréométrie. Je pense qu'il faut commencer par la *Rectimétrie*, du moins en ce qui concerne les principes. Ces derniers étant bien établis, les théories spéciales telles que celles de l'équivalence, de la similitude, de la mesure, etc., pourront être traitées simultanément dans le plan et dans l'espace. Je ne veux pas dire, avec les *fusionistes*, que les figures à

trois dimensions dans ces théories doivent intervenir dans la démonstration de théorèmes planimétriques, mais bien que de nombreuses démonstrations peuvent être étendues simplement du plan à l'espace. Un tel mode d'exposition économisera du temps et fera mieux saisir aux élèves les relations qui existent entre les diverses parties d'une même théorie.

Pour donner plus d'unité aux diverses théories, on se trouvera bien d'appliquer un principe moderne, dont j'ai signalé, dans mes *Éléments*, l'utilité didactique. Soient une figure A à laquelle se rapportent les postulats  $a, b, c, d, \dots$ , et une figure B, pour laquelle on peut énoncer les mêmes postulats, *moyennant le changement de certaines expressions de langage*. Toutes les propriétés de la figure A qui se déduisent de  $a, b, c, d$ , seront exactes pour la figure B, *si l'on apporte dans le discours les modifications dont il s'agit*. Il en sera de même pour les démonstrations de ces propriétés <sup>(1)</sup>. J'ai appliqué ce principe à l'étude de la ligne droite, du cercle, du faisceau de rayons et du faisceau de plans; ainsi les propositions  $a, b, c, d, \dots$ , postulées ou démontrées pour le plan, sont valables (sauf l'axiome des parallèles), pour la gerbe de rayons, moyennant le changement de certains mots dans les énoncés : celle des propriétés du triangle, par exemple, qui sont indépendantes de l'axiome des parallèles, font connaître des propriétés des trièdres. Le professeur sera ainsi conduit à faire remarquer, à la fin de son cours, que la différence essentielle entre la Géométrie de la gerbe et la Géométrie plane tient à la présence, dans cette dernière, du postulat d'Euclide.

Il est bon aussi de mettre à profit les analogies que présentent diverses théories, par exemple celle des figures égales et celle des figures semblables : les définitions de ces deux espèces de figures se ramènent l'une à l'autre, en faisant se correspondre les expressions *segments égaux* et *segments proportionnels*. La même remarque s'applique aux raisonnements faits sur ces figures. Remarquons d'ailleurs que les modifications ne doivent pas être apportées pour l'amour de la nouveauté, mais seulement quand elles sont nécessaires ou du moins vraiment utiles.

C'est dans cet esprit qu'ont été écrits mes *Éléments* <sup>(2)</sup>, dont j'ai publié deux éditions, la première à l'usage des écoles classiques et des instituts techniques, l'autre à l'usage des gymnases et lycées. J'énonce au début les postulats relatifs à la droite, considérée en soi, et je définis

(<sup>1</sup>) Dans ce principe est compris celui de dualité, de la Géométrie projective.

(<sup>2</sup>) La première édition a été publiée en 1897, la deuxième en 1900, chez DRUCKER, à Padoue. J'ai eu comme collaborateur, pour la partie didactique, M. le professeur Paolo GARRANIGA, du Lycée royal Tite-Live, à Padoue.

l'égalité et l'inégalité des segments, sans recourir à la superposition. J'en déduis les propriétés d'addition et de soustraction des segments. Toutes ces propriétés sont valables, *mutatis mutandis*, pour le faisceau de rayons, pour la circonférence et pour le faisceau de plans. Je donne ensuite le postulat qui distingue la droite des autres figures, à savoir sa propriété d'être déterminée par deux points. Après l'étude des figures rectilignes, vient la définition des figures égales. J'introduis au début le concept du *couple de droites* (figure formée par deux droites), et j'énonce le postulat relatif à la réversibilité de ce couple. J'arrive alors aux parallèles, définies comme droites opposées par rapport à un point, et au postulat qui les concerne. Dans la première édition, la plus complète, je démontre que la droite est une figure *ouverte*. La seconde est destinée à des élèves d'esprit moins formé; c'est pourquoi j'y admetts comme axiomatique la proposition dont il s'agit, tout en la distinguant des autres postulats, parce qu'elle n'est pas indémontrable. J'aborde ensuite la construction du plan, dont j'ai démontré dans la première édition la propriété fondamentale : il contient toute droite dont il contient deux points. Dans la seconde, cette proposition est admise sans démonstration.

En raison de la correspondance signalée plus haut entre la droite et le faisceau de rayons, l'angle se présente comme une partie du faisceau, de même que le segment est une partie de la droite. L'angle ainsi défini est à distinguer de l'*angle plan*, partie du plan limitée par deux rayons : le premier est un être linéaire, le second un être superficiel. Dans la première édition je démontre toutes les propriétés du faisceau de rayons, correspondant aux postulats de la droite, considérée en soi. Dans la seconde, j'admetts pour plus de brièveté quelques-unes de ces propriétés qui sont intuitives dans le champ de notre observation.

Je termine le second Livre en traitant des constructions élémentaires qui peuvent s'effectuer avec la règle et le compas.

Dans le troisième Livre, j'établis les éléments de la Géométrie de l'espace, jusqu'à la génération du cône, du cylindre et de la sphère. Dans la première édition, j'ai ajouté un postulat à ceux qui sont indiqués plus haut : *il existe des points en dehors du plan*. Je l'applique à la construction de l'espace ordinaire (sans exclure la possibilité d'espaces supérieurs, que je laisse de côté pour ne pas trop étendre l'Ouvrage). J'ajoute un *postulat pratique* (c'est-à-dire nécessaire aux applications pratiques), d'où l'on doit conclure que l'espace physique est à trois dimensions. Dans la seconde édition, j'ai procédé autrement : au postulat : *il existe des points en dehors du plan*, j'ajoute celui-ci : *deux plans ayant*

*un point commun ont une droite commune.* La Géométrie se trouve ainsi réduite, d'un coup, à l'étude de l'espace ordinaire, et les premières notions de stéréométrie en sont rendues plus accessibles.

Les trois premiers livres concernent la Géométrie générale de la droite, du plan et de l'espace. Dans le livre suivant, je traite de l'équivalence des figures planes et solides. Il faut abandonner la définition euclidienne, d'après laquelle deux figures planes ou solides sont dites équivalentes quand elles ont les mêmes aires ou le même volume, sans que l'on ait préalablement défini l'aire et le volume. Je donne deux postulats relatifs, le premier aux polygones, le second aux polyèdres, postulats d'ailleurs démontrables. Pour l'équivalence, j'invoque le postulat du continu rectiligne et celui d'Archimède (*si  $a$  et  $b$  sont deux segments, et si  $a < b$ , il existe un nombre  $n$  tel que  $an > b$* ). Au moyen du postulat d'Archimède et de celui-ci : *tout segment, même variable, contient un point distinct de ses extrémités*, on peut démontrer le postulat du continu rectiligne sous la forme de Dedekind : *toute répartition de Dedekind de points sur un segment est déterminée par un seul point*.

M. Hilbert, dans son beau travail : *Sur les fondements de la Géométrie* <sup>(1)</sup> donne à l'axiome d'Archimède le nom d'*axiome de continuité*, et démontre très élégamment la possibilité d'une Géométrie qui ne vérifierait pas cet axiome. Cette géométrie diffère de la mienne en ce sens que celle-ci est plus complète et qu'on peut y définir une continuité plus générale que la continuité ordinaire.

Mon postulat du continu non seulement est différent de celui d'Archimède, mais il en est indépendant. On peut étendre le concept du point de manière à éviter d'énoncer le postulat de la continuité, tout en satisfaisant aux autres axiomes, comme on peut, par une extension d'une autre nature, construire dans l'espace à trois dimensions une variété à quatre dimensions qui satisfait aux postulats de l'hyperespace. Aussi la Géométrie se généralise comme l'Arithmétique, où l'on étend la notion de nombre en construisant successivement les nombres fractionnaires, négatifs, incommensurables, et aussi les nombres infiniment grands ou infiniment petits *actuels*, auxquels s'appliquent encore les opérations fondamentales.

Mais cette manière d'éviter le postulat de la continuité n'est pas à recommander dans l'enseignement <sup>(2)</sup>. Il est préférable, au contraire, de

(1) Traduit en français par M. LAUGEL (Paris, Gauthier-Villars).

(2) *Il postulato del continuo* (Rend. Acc. dei Lincei, 1898). Voir aussi l'ap-

l'appliquer chaque fois qu'il ne s'ensuit pas de difficulté didactique.

Dans l'appendice de la première édition, destinée aux professeurs, j'ai démontré les propositions qui avaient été admises dans le texte sans démonstration.

Ma méthode a été expérimentée dans ces dernières années, et quand le professeur s'en est assez bien assimilé les principes pour les exposer et les interpréter clairement, les résultats sont, je puis le dire, des plus satisfaisants <sup>(1)</sup>.

Je me permettrai d'achever cette communication par quelques remarques concernant la Critique. Pour remplir un rôle vraiment utile, la Critique doit être élevée et impartiale. Elle doit être élevée en ne s'attardant pas aux minuties, mais en jugeant les œuvres sur leur ensemble. Elle doit être impartiale, parce que la perfection ne saurait être absolue, l'auteur ayant à tenir compte de conditions surabondantes ou spéciales. Les œuvres doivent donc être jugées par comparaison avec celles du même genre, et non d'une manière absolue. Enfin, comme un même problème peut admettre diverses solutions également satisfaisantes, la Critique doit être tolérante. C'est dans ces seules conditions qu'elle pourra contribuer aux progrès de l'Enseignement. Les *Scuole di magistero*, annexées aux Facultés des Sciences, en Italie, peuvent, à ce point de vue, jouer un rôle utile, en ne se consacrant pas uniquement aux recherches de science pure, et en étudiant les questions de principes, laissées généralement de côté dans les cours universitaires. Le but primordial de ces écoles, il ne faut pas l'oublier, est en effet de préparer de bons professeurs pour les écoles secondaires.

pendice à la première édition des *Eléments*, édité séparément chez Drucker, à Padoue (1898).

(<sup>1</sup>) En octobre 1901 a été publiée la troisième édition, ainsi que la première édition des *Nozioni elementari di Geomet. intuitiva*, qui servent, dans les gymnases inférieurs (trois années), de préparation à l'étude de la Géométrie rationnelle, celle-ci étant enseignée, en Italie, dans les gymnases supérieurs (deux années) et dans les lycées (trois années).